

Images et frontières en mathématiques

Muriel Lefebvre

► **To cite this version:**

Muriel Lefebvre. Images et frontières en mathématiques. Questions de communication, Presses Universitaires de Nancy - Editions Universitaires de Lorraine, 2003. <sic_00001393>

HAL Id: sic_00001393

https://archivesic.ccsd.cnrs.fr/sic_00001393

Submitted on 30 Mar 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MURIEL LEFEBVRE

Groupe d'étude et de recherche sur la science, Université Strasbourg 1
Université de Franche-Comté
muriel.lefebvre@gersulp.u-strasbg.fr

IMAGES ET FRONTIERES EN MATHEMATIQUES

Résumé. — Dans cet article, nous aborderons la question des communautés mathématiques par le biais d'un dispositif technique : la production et l'interprétation d'images. En mathématiques, si les images sont omniprésentes dans le contexte informel des séminaires, elles sont presque totalement évincées dans le contexte formel de validation des connaissances des articles publiés. Face à ce constat, nous avons cherché à caractériser le rôle et le statut de ces images pour un ensemble de mathématiciens habitués à travailler ensemble, en analysant en quoi ces usages diversifiés, mais également les démarcations qu'ils peuvent induire, renvoient à différentes définitions de la notion de communauté. Nous montrerons notamment que si, dans un contexte formel, il est fait référence à une communauté comprenant l'ensemble des mathématiciens et renvoyant à une forme de *doxa* commune à tous les chercheurs en mathématiques, dans un contexte plus informel, c'est davantage une communauté de pratiques qui est alors impliquée et constitue l'enjeu de l'interaction.

Mots clés. — Images, mathématiques, communauté de chercheurs, format d'écriture, épistémologie, médiation.

Comme le montre un rapide examen de différents manuels proposant une introduction à la sociologie des sciences, la notion de communauté scientifique est au cœur des études qui se sont développées ces dernières années sur la science, ses acteurs et ses pratiques (Vinck, 1995 ; Dubois, 1999 ; Martin, 2000). La communauté y est envisagée comme un groupe de personnes qui se pensent et sont perçues comme une unité. Plusieurs aspects de cette unité peuvent être considérés. Ainsi, une communauté peut-elle être étudiée à partir des conventions et des valeurs que partagent ses différents membres (règles méthodologiques et éthiques par exemple ou encore langage spécialisé et formalisme), mais également des institutions qu'elle développe : procédures de validation et de reconnaissance, institutions professionnelles, associations, etc. (Merton, 1973). Le contenu épistémologique commun aux différents chercheurs (les modèles et théories reconnus par l'ensemble de ce groupe de chercheurs ou leur style de pensée par exemple) est également un élément de l'unité et de la cohésion qui peut être pris en considération (Fleck, 1935/1979 ; Kuhn, 1970/1983), tout comme l'ensemble des pratiques et des dispositifs techniques propres à ce groupe d'individus (Knorr-Cetina, 1981). À plusieurs reprises, des études de laboratoire entreprises, ces vingt dernières années, par des sociologues des sciences se sont ainsi attachées à montrer l'importance des dispositifs techniques et expérimentaux dans l'élaboration de communautés de pratiques (Latour, 1985 ; Knorr-Cetina, 1981). Dans cet article, nous étudions les relations qu'entretiennent entre elles ces différentes dimensions de la communauté scientifique. Nous examinerons plus particulièrement l'articulation entre des procédures de validation, communes à l'ensemble d'une communauté de chercheurs, et des pratiques plus localisées et situées, à partir du dispositif technique que constitue la production d'images en mathématiques.

La production d'images semble constituer une activité inhérente à la production des mathématiques. En effet, rares sont les mathématiciens qui ne réalisent pas quelques dessins, généralement très sommaires, en préparant un brouillon ou à l'occasion de discussions et de séminaires informels : un petit cercle ou encore deux droites qui se croisent, par exemple. La plupart du temps, cependant, ces images disparaissent des articles soumis à publication. Ainsi, si les images sont omniprésentes dans le contexte informel des séminaires, elles sont presque totalement évincées dans le contexte formel de validation des connaissances des articles publiés. Face à ce constat, nous avons cherché à caractériser le rôle et le statut de ces images pour un ensemble de mathématiciens habitués à travailler ensemble, en analysant en quoi ces usages diversifiés, mais également les démarcations qu'ils peuvent induire ou souligner, renvoient à différentes définitions de la notion de communauté. Nous montrons notamment que si, dans un contexte formel, il est fait référence à une communauté comprenant l'ensemble des mathématiciens et renvoyant à une forme de *doxa* commune à tous les chercheurs en mathématiques, dans un contexte plus informel, ce qui constitue l'enjeu de l'interaction est davantage l'implication d'une communauté de pratiques.

Notre approche s'inspire directement de ce qu'il est convenu d'appeler « l'anthropologie des sciences » (Latour, Woolgar, 1979/1988). Nous avons

associé une analyse de discours de chercheurs dans une spécialité, la géométrie algébrique, à une démarche ethnographique, avec l'observation attentive et répétée des pratiques de communication à l'œuvre dans leur groupe de travail. Quarante et un entretiens de type semi-directif, sur le thème de l'image mathématique et de son statut, ont été réalisés, entre 1997 et 2000, avec des mathématiciens ayant publié au moins un article en géométrie algébrique (Lefebvre, 2001). La géométrie algébrique a été choisie comme domaine d'observation parce qu'elle est à la frontière de nombreuses spécialités mathématiques et a constitué une branche très dynamique, ces dernières années, à l'Institut de recherche mathématique avancée de Strasbourg. Cette démarche a permis d'étudier la communication en actes et, en particulier, d'analyser les usages qui pouvaient être faits des images scientifiques en situation d'interaction. Enfin, cette recherche a été complétée par l'analyse de documents mathématiques contemporains participant à la construction, à la transmission et à la validation des connaissances mathématiques (brouillons, différentes versions d'articles de recherche, ou encore articles publiés).

L'image dans la matérialisation de frontières mathématiques

Au cours de notre enquête ethnographique, nous avons observé que lorsqu'un mathématicien rédige une démonstration et qu'il souhaite introduire un dessin, il l'esquisse le plus souvent dans un coin du tableau, qu'il aura pris soin de délimiter matériellement par une ligne figurant une sorte de feuille à part. Les dessins sont alors séparés du reste du « texte », comme s'ils ne faisaient pas partie de « l'écrit ». Les nombreuses images ainsi dessinées pour une explication ponctuelle sont ensuite immédiatement effacées, au profit d'une écriture symbolique. Elles semblent ne jouer qu'un rôle éphémère, important dans l'action des situations informelles, mais sans légitimité dans l'énoncé mathématique. Dans un premier temps, il nous faut expliciter cet usage pour le moins inattendu des images dans le contexte formel de validation d'un énoncé mathématique. Nous nous appuierons sur une analyse des discours tenus par les chercheurs quant à leur utilisation des images.

Les temps de l'activité de production des connaissances décrits par les mathématiciens

Les chercheurs en géométrie algébrique que nous avons rencontrés à Strasbourg ont presque tous limité l'usage des représentations visuelles à une démarche de recherche. Ainsi, d'après un mathématicien : « Quand on expose des choses dans un séminaire ou quand on répond à des questions, ce qui est encore moins formel, on ne se prive pas de mettre tous les petits dessins qu'on veut. Simplement, quand on rédige après, on s'astreint cette fois-ci à rédiger des choses qui ont l'air formellement tout à fait correctes, et simplement, de temps en temps, on met des figures, quelquefois en quelque

sorte pour apaiser, pour rendre la chose un peu plus digeste... Mais en même temps aussi, parce que si on souhaite être compris, on sait très bien que ça va beaucoup aider ».

Les images sont reléguées au statut d'outil heuristique et communicationnel utile dans un contexte informel, mais sans intérêt pour la rédaction des publications. Un autre chercheur précise : « Vraiment, faire des mathématiques, les vraies mathématiques se font sans dessin. À la fin des fins, n'importe quel théorème doit pouvoir être écrit sans aucun dessin. [...] Je pense qu'une preuve doit être une preuve. Moi, j'aime beaucoup les dessins, mais il y a des choses avec lesquelles on ne peut pas plaisanter. Une revue qui se veut sérieuse ne peut pas publier un théorème dont la preuve n'est pas complète ». Contrairement aux chercheurs des sciences expérimentales qui s'appuieraient sur l'image pour construire une démonstration et convaincre leurs interlocuteurs (Latour, 1985), les mathématiciens tendent à l'exclure de leurs espaces de légitimation. Ce dernier chercheur semble, en effet, associer l'image à une « plaisanterie ». Il introduit une rupture épistémologique entre les documents avec dessins et ceux sans dessin : les vraies mathématiques seraient celles exprimées sans dessin. Une image viendrait masquer les lacunes d'une démonstration mais ne ferait en aucun cas partie d'une preuve formelle. Cela signifie-t-il qu'un article contenant des images ne peut guère être établi et validé ? Un mathématicien perd-il en crédibilité aux yeux de ses collègues s'il recourt à des images, non pas comme simples illustrations, mais dans l'écriture du texte, comme outil de démonstration ? Un troisième géomètre algébriste ajoute : « Il y a, au moment du passage au texte, du passage à l'écriture, un affranchissement de l'image ».

Seule l'écriture formelle, semble dire ce mathématicien, permettrait de construire un texte, signifiant par là un énoncé mathématique valide. C'est la notion de texte qui est ici questionnée : seul l'énoncé certifié ou certifiable semble avoir ce statut, contrairement aux documents élaborés en amont de l'article publié. La plupart des géomètres algébristes rencontrés à Strasbourg distinguent en effet ce qui va être écrit pour soi, les « mathématiques en train de se faire », et le document final qui sera produit. Un chercheur a ainsi précisé : « Vous avez cette différence entre ce qui est effectivement publié et ce avec quoi les gens travaillent ». On retrouve ici le clivage établi par K. Popper (Popper, 1934/1978) entre contexte de découverte et contexte de justification. Dans un premier temps, d'après les mathématiciens, il y aurait un avant-texte, comprenant toutes les écritures intermédiaires ayant participé à l'élaboration de l'idée, et au premier jet d'écriture, avant sa formalisation en un article : brouillons, schémas, présentations à des séminaires, etc. C'est le contexte de découverte, sans véritable contrainte (Denis, Pontille, 2002). Dans un second temps, pour espérer être publiées, les idées avancées doivent être justifiées, ce qui, idéalement, s'opère dans un mode exclusivement formel, en ayant soin d'éliminer la démarche de recherche, et après un sévère élagage des éléments contingents parmi lesquels sont reléguées les images (Knorr-Cetina, 1981). Ce qui prime n'est plus tant le transfert d'intuition que le mécanisme de démonstration et l'exposition du raisonnement formel.

Cette distinction systématique entre un avant-texte informel et un texte

publié, reprise tant dans les discours des mathématiciens sur leurs activités de recherche que dans leurs pratiques de validation des connaissances, renvoie à plusieurs démarcations : cadre informel/cadre formel, raisonnement incorrect/raisonnement correct, « fausses mathématiques »/« vraies mathématiques ». Il nous faut, à présent, explorer plus avant ces différentes démarcations qui dépassent le cadre local de la communauté des géomètres algébristes de Strasbourg.

Un format d'exposition des connaissances mathématiques

Dans quel contexte ces démarcations, révélées dans un contexte de formalisation et de validation des connaissances, se sont-elles constituées ? Retournons brièvement pas plus d'un siècle en arrière pour donner une rapide description du contexte historique et mathématique. Le XIX^e siècle a été caractérisé par la professionnalisation et l'institutionnalisation des sciences. Ainsi, les mathématiques sont-elles instituées en discipline autonome. L'enseignement spécialisé y est considérablement développé et une communauté mathématique nationale, puis internationale, émerge progressivement, les chercheurs se regroupant en associations et en sociétés scientifiques. Afin de faciliter les échanges, des efforts sont alors produits pour tenter d'uniformiser les notations utilisées et les exposés scientifiques adoptent progressivement une structure commune, compréhensible par tous et caractérisée par ce que B. Latour a appelé la mobilité – les articles peuvent être transportés et diffusés sans difficulté – et l'immuabilité – leur diffusion n'entraîne pas de modifications, de déformations sensibles, ni de perte de sens (Latour, 1985 ; Eisenstein, 1979/1991). Ainsi, dans les sciences expérimentales, les articles se sont-ils, pour la plupart, progressivement conformés au format IMRAD¹.

Le format des démonstrations mathématiques que nous connaissons aujourd'hui a été établi au début du XX^e siècle, mais dans un contexte plus général de perte de certitude et de crise des fondements, dans lequel l'image était dénoncée comme factice et trompeuse. Reprenant la présentation d'Euclide dans ses *Éléments*, D. Hilbert mit au point un mode de présentation appelé « méthode axiomatique », visant à asseoir les mathématiques sur des bases « plus solides et plus rigoureuses », en excluant notamment l'image et ses simulacres. Cette méthode adopte une structure DTP (Définition – Théorème – Preuve) qui définit implicitement un format aux démonstrations : celles-ci doivent être exclusivement rédigées dans un système formel et obéir à des règles d'inférence clairement définies. Cette présentation, élaborée dans un contexte de structuration de la discipline et de la communauté des mathématiciens, est aujourd'hui préconisée par la plupart des éditeurs de revues mathématiques, dont les instructions sont relayées par des manuels de styles et des pages d'instructions aux auteurs.

¹ Ce format, qui s'est progressivement imposé depuis le XVII^e siècle, comprend généralement cinq parties : l'Introduction, le Matériel et les Méthodes, les Résultats, et la Discussion. C. Bazerman décrit largement le contexte dans lequel ce plan expérimental, aujourd'hui canonique, a été élaboré (Bazerman, 1988). Voir également D. Pontille (2000) pour l'élaboration d'un format d'exposition en sociologie et en psychologie.

Ceux-ci se présentent comme une succession de règles concernant aussi bien les notations que les procédures : tournures de phrase, grammaire, syntaxe, vocabulaire, notations, mais également structure de l'article ou encore plan d'exposition des résultats. Certains manuels sont rédigés comme de véritables guides de recettes (Swanson, 1971/1979), avec de judicieux conseils pour réussir la préparation de manuscrits qui doivent être soumis à une revue. Les images, quant à elles, sont étonnamment absentes de ces instructions. Seules leurs caractéristiques techniques sont prises en compte (taille et logiciel utilisé notamment).

Format et frontières

Si le format DTP a été initié dans le but de garantir l'objectivité d'un texte et de faciliter sa transmission, son utilisation aujourd'hui va bien au-delà de ces premiers objectifs et renvoie à de nouvelles démarcations. Un article écrit par deux éminents mathématiciens, A. Jaffe (chercheur en physique mathématique et président de l'*American Mathematical Society*) et F. Quinn (mathématicien) a, par exemple, récemment ouvert la controverse. D'après ces deux auteurs (Jaffe, Quinn, 1993), les récents développements en physique, repris par des mathématiciens, ne sont pas toujours en accord avec les standards de rigueur propres aux mathématiques. Ils proposent de transposer la distinction physique théorique/physique expérimentale en mathématiques et comparent les premières étapes de l'activité de découverte des mathématiciens (faites selon eux d'inspiration, de spéculation et d'intuition) au travail des physiciens théoriciens. Les mathématiques rigoureuses, analogues à la physique expérimentale, permettraient de corriger, de raffiner et de valider les résultats énoncés durant la première étape. À partir de cette analogie, les deux chercheurs ont montré que les mathématiques spéculatives étaient dangereuses pour les vraies mathématiques. Ils s'inquiètent en fait de la « dérive actuelle » des preuves et de leurs formulations vers trop d'intuition et de spéculation. A. Jaffe et F. Quinn critiquent, par exemple, des mathématiciens qu'ils considèrent comme incompetents, en raison du mode d'exposition des connaissances utilisé², ce qui les conduit à établir une distinction entre les pratiques et les méthodes de démonstration des mathématiques pures (ou « expérimentales », selon leur terminologie) et celles qui sont appliquées (appelées un peu « mathématiques théoriques »).

En définitive, l'objet de l'article des deux chercheurs n'est pas tant de définir de nouveaux critères de rigueur mathématique que d'établir des distinctions épistémologiques et disciplinaires. La référence à un format d'écriture est ici utilisée comme critère de démarcation entre « vraies » mathématiques et mathématiques « approximatives », ou encore entre mathématiques fondamentales et mathématiques appliquées – et physique. C'est donc une

² Les critiques formulées par A. Jaffe et F. Quinn vis-à-vis du mathématicien R. Thom ne sont pas sans rappeler celles de A. Sokal à l'égard de nombreux intellectuels, notamment français : J. Lacan, J. Kristeva, J.-F. Lyotard, B. Latour, etc. A. Sokal dénonce l'utilisation impropre qui serait faite par ces auteurs des concepts scientifiques – et notamment mathématiques – sans justification et surtout sans démonstration, dans les sciences humaines et sociales (Jurdant, 1998 ; Jeanneret, 1998).

frontière épistémologique qui est établie autour d'un espace de connaissances mathématiques considérées comme avérées, lorsqu'elles sont énoncées – et énonçables – selon un format standard d'exposition. Mais c'est également une distinction entre pratiques rigoureuses et pratiques trop intuitives, ou encore entre mathématiques de « professionnels » et mathématiques d'« amateurs » qui est ici en jeu (Dolby, 1982).

Les démarcations mentionnées dans l'article de A. Jaffe et F. Quinn sont donc à la fois d'ordre épistémologique, disciplinaire et professionnel. Elles concernent l'ensemble des spécialités mathématiques dont ces deux auteurs se font en quelque sorte les porte-parole – l'AMS est la plus importante et la plus puissante association de mathématiciens au monde – et renvoient directement à la structuration d'une communauté mathématique. Comme l'a souligné R.G.A. Dolby, pour exister et perdurer, une communauté scientifique s'efforce constamment d'affirmer son autonomie, de poser des conventions, une méthodologie, mais aussi d'afficher une unité tant sociale et institutionnelle qu'épistémologique. En mathématiques, la formalisation des connaissances, telle qu'elle a été opérée au début du XX^e siècle, a simultanément formalisé l'activité mathématique et la communauté des mathématiciens. Ainsi, l'adoption par un chercheur d'un tel format d'écriture spécifique revient-elle, pour celui-ci, à confirmer sa conformité avec les règles de conduite de la communauté des mathématiciens prise dans son ensemble, ou au contraire à s'en exclure (Hunt, 1991). Par ailleurs, aujourd'hui encore, la communauté des chercheurs en mathématiques fondamentales, par la voix de la puissante *American Mathematical Society*, cherche toujours à se démarquer des communautés de chercheurs en mathématiques appliquées, en physique et en informatique³, tant dans le contenu que dans les méthodes de recherche et d'exposition des connaissances.

Il nous paraît particulièrement intéressant de constater que ces démarcations, constituant un fondement pour la communauté internationale des mathématiciens, sont les mêmes que celles qui apparaissent dans les discours des géomètres algébristes rencontrés à Strasbourg. Ce que nous aurions pu prendre pour un discours localisé renvoie donc à une représentation beaucoup plus générale des mathématiques en tant que science et que pratique. Dans leurs discours sur le statut des images et dans leurs pratiques formelles de validation des connaissances, tous les chercheurs font référence à une communauté de pensée centrée sur des normes, une méthodologie et un contenu épistémologique. Ils reprennent les représentations d'une véritable *doxa* des mathématiciens purs, correspondant à celle explicitée dans l'article de A. Jaffe et F. Quinn.

Des frontières sans cesse transgressées

L'observation des pratiques graphiques d'une communauté locale de mathématiciens dans un contexte formel a montré l'importance d'une

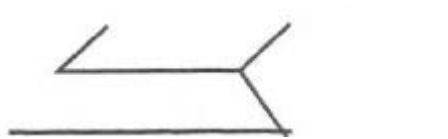
³ Une controverse autour de la démonstration « par ordinateur » du théorème des quatre couleurs avait déjà soulevé des questions similaires en 1976. La question posée était : « Jusqu'où les pratiques des informaticiens peuvent-elles pénétrer dans le champ de certification des mathématiques fondamentales ? » (MacKenzie, 1999).

référence constante à la communauté internationale de l'ensemble des mathématiciens. Il serait cependant dommageable de se limiter à cette seule approche, sans examiner à quelles notions et définitions de la communauté sont renvoyés des usages plus informels de l'image mathématique. En effet, si les représentations visuelles sont le plus souvent exclues des procédures de certification au nom de critères épistémologiques, on note néanmoins l'omniprésence d'images en mathématiques, que ce soit pour l'élaboration de brouillons ou sur les tableaux utilisés pendant les séminaires informels. Si ces dessins ne sont pas toujours très différents de ceux réalisés pour les publications, ils sont beaucoup plus variés et souvent simplement esquissés. Leur fonction ici est avant tout interactionnelle et épistémique. L'extrait ci-dessous rend ainsi compte de l'utilisation qui peut être faite de différentes représentations visuelles, pendant les séances d'un séminaire informel de géométrie algébrique, réunissant la plupart des chercheurs strasbourgeois de cette discipline :

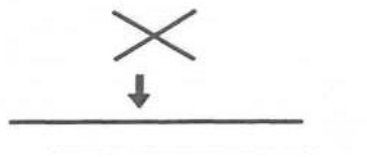
Compte rendu de la présentation du groupe de travail « Géométrie algébrique » du 30/10/1999

Le séminaire touche à sa fin, lorsqu'un chercheur, dubitatif face au résultat énoncé par l'orateur, intervient : « J'ai un contre-exemple. Je vous montre ? » S'ensuit une discussion enflammée entre les protagonistes du séminaire, accompagnée de nombreux gestes. Mais les gestes seuls ne parviennent pas à convaincre l'assemblée.

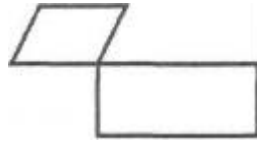
Le chercheur se lève alors, et se dirige vers le tableau : « J'ai un exemple. Je vais faire un dessin ». Il esquisse le dessin de l'intersection de deux plans :



puis l'efface : « C'est justement ce qu'il ne fallait pas faire... » La salle s'anime. L'orateur ne comprend pas où le chercheur souhaite en venir. Celui-ci ébauche plusieurs gestes avant d'ajouter, comme pour s'excuser : « Je ne sais pas dessiner... ». Il propose alors une expression algébrique au tableau. Mais les remarques fusent : « Pourquoi ? Je ne comprends pas » ; « Il faut l'écrire ». Il trace un nouveau dessin :



et ajoute en montrant la figure : « Cette situation-là croix un ». Il contemple ensuite son dessin, dubitatif, puis s'adresse à l'orateur du séminaire : « Je t'assure, il y a un contre-exemple comme ça ! »



Tandis que des rires amusés fusaient dans la salle : « Tu ne vas pas faire un dessin dans A4 ! ? ». Le chercheur est convaincu de la valeur de sa mise en scène. L'assemblée reste pensive, mais semble intéressée par l'idée suggérée par le chercheur.

La scène rapportée n'a rien d'exceptionnel. Les dessins, très schématiques, produits dans ce contexte sont utilisés pour extérioriser une démarche cognitive individuelle en un espace partagé. En effet, dans leurs pratiques, les mathématiciens adoptent souvent une attitude platonicienne, c'est-à-dire qu'ils envisagent leurs concepts sous la forme d'objets pour pouvoir travailler avec eux. À travers l'image – graphique mais aussi gestuelle ou verbale (Lefebvre, 2001) – le mathématicien peut décrire et extérioriser sa propre représentation des concepts, dans un espace collectif. L'image est alors utilisée pour présenter, faire apparaître mais également faire exister l'« objet mathématique ». La matérialité de ces représentations permet de donner une présence concrète à l'objet mathématique abstrait et de le convoquer dans des situations d'interaction (Ochs et al., 1994). Elle rend possible un usage socialisé : l'invisible devient visible et surtout il peut être communiqué et débattu avec d'autres, prenant ainsi part à la création d'un regard partagé sur le monde mathématique. L'image joue donc ici un rôle épistémique fondamental, participant directement à la relation expérimentale que les mathématiciens construisent à leurs objets.

Pendant un séminaire, le contenu sémantique de l'image n'est cependant pas toujours l'élément qui prévaut. Le plus souvent simplifiée à l'extrême, l'image provoque une impulsion au sein du groupe, aussi bien pour le dessinateur que pour l'audience. La scène rapportée montre, notamment, comment au-delà d'une fonction de représentation de l'objet mathématique, l'image constitue une amorce heuristique pour celui qui l'élabore en même temps qu'elle constitue un instrument des médiations entre les chercheurs. À Strasbourg, les géomètres algébristes présents pendant un séminaire cherchent à s'accorder, dans une double démarche d'extériorisation – par l'orateur – et d'intériorisation – par le public – d'une représentation et d'un rapport à l'objet. Cette double démarche ne peut s'accomplir que dans une interaction mutuelle, mue par une sorte de cristallisation autour de l'image (tous les regards se concentrent sur les gestes qui élaborent le croquis), comme le décrit un chercheur : « [Pendant un séminaire] faire un petit diagramme, un gribouillis, qui évoque quelque chose, c'est souvent une aide. Aussi, je pense que ça fait des temps dans les exposés où, disons, tout le monde se regroupe, un peu comme pendant une marche. Arrivé

là, tout le monde a la même image mentale dans la tête... ». À une proximité relationnelle induite par les images correspond un rapprochement des intérêts conceptuels des chercheurs en géométrie algébrique et réciproquement. Mais dès l'instant où les mathématiciens passent à un mode de partage, l'image semble perdre tous ses attraits et les mathématiciens se contentent d'une expression formelle du résultat. Une fois l'image intériorisée par les chercheurs, lorsqu'elle a contribué à diffuser une idée et qu'elle a joué son rôle de partage, elle ne semble plus d'aucune utilité.

Si l'image constitue un instrument de médiation entre les chercheurs et leurs objets mathématiques, elle n'en est pas pour autant l'enjeu central, c'est-à-dire dans la construction de sens dans un collectif. En effet, les situations informelles d'interaction favorisent la construction d'une forme de rationalité partagée qui n'est pas celle de la logique formelle. Il s'agit d'une rationalité en actes, relevant d'une démarche sensible autant qu'intellectuelle, socialement construite dans le discours et dans la renonciation. En effet, le sens se construit localement, dans l'interaction, au travers de ressources implicites, contrairement à ce que pourrait laisser croire le traitement plus ou moins mécanisable des énoncés mathématiques par le langage formel. L'image, dans ce contexte, permet de ramener l'objet mathématique dans l'interaction par le biais d'éléments dénotatifs et de références déictiques. Elle est utilisée pour quitter le registre du jeu de langage et la bipolarité vrai/faux, rigoureux/non rigoureux, mathématique/non mathématique souvent associée par les mathématiciens au langage formel, appuyant ainsi une démarche exploratoire et sensorielle.

Finalement, l'image mathématique – et c'est là, nous semble-t-il, que réside sa vraie spécificité – contribue à rendre possible une médiation qui, si elle ne se fait pas nécessairement à travers elle, se réalise grâce à elle. Elle organise un espace de création, à la fois très souple et très ouvert – dans lequel la subjectivité et l'implicite sont des ressources nécessaires – et relativement fermé et cadré, puisque chaque image obéit également à des règles d'écriture précises. L'image permet de franchir des frontières cognitives et sociales, de créer de nouvelles associations de concepts mathématiques et de nouvelles interactions entre les chercheurs, tout en maintenant un cadre aux interactions, dans la mesure où l'image est un objet, ni totalement formel, ni totalement informel. Aussi offre-t-elle une grande liberté de création par les nouvelles combinaisons, associations, confrontations de données qu'elle favorise à l'intérieur de la discipline, mais également, comme c'est ici le cas, entre les différentes spécialités mathématiques.

Conclusion

En étudiant l'usage et le statut des représentations visuelles par une communauté strasbourgeoise de mathématiciens en géométrie algébrique, nous avons montré comment, dans un contexte formel, ces derniers reprennent la *doxa* plus générale des mathématiciens purs (dans leurs discours généraux sur le statut des images et dans leurs pratiques formelles et stabilisées de transmission et de validation des connaissances) instaurant des démarcations épistémologiques et disciplinaires communes à l'ensemble

de la communauté mathématique. Cependant, ces différentes se diluent dans les pratiques quotidiennes et informelles de recherche, au travers de l'image mathématique notamment. Dans un contexte informel comme celui des séminaires, les images sont en effet utilisées pour franchir, voire s'affranchir de frontières cognitives et sociales. Elles interviennent dans la construction d'un rapport épistémique à l'objet mathématique mais également pour la mise en œuvre de relations intersubjectives et l'instauration de modes particuliers de coopération entre les mathématiciens. Elles permettent de jouer sur des frontières préétablies (les lignes de démarcation entre spécialités mathématiques, mais également autour des mathématiques envisagées comme corpus de connaissances), de les transgresser, voire de les dépasser, jouant sur l'ambiguïté de leurs usages et de leur statut

Ce sont finalement deux définitions différentes de la « communauté mathématique » qui sont en jeu. En situation formelle, les géomètres algébristes de Strasbourg font référence à une communauté de pensée centrée sur des normes, une méthodologie, un contenu épistémologique et une unité sociale, reprenant les représentations d'une véritable *doxa* des mathématiciens « purs ». Cette communauté est celle à laquelle les chercheurs font constamment référence lorsqu'ils souhaitent valider un résultat et être ainsi reconnus par l'ensemble des mathématiciens. En situation plus informelle, nous avons rencontré une communauté de chercheurs qui travaillent quotidiennement ensemble, une communauté de pratiques concrètes et locales mais également une communauté épistémique dans le rapport local qu'elle établit avec ses objets. Dans le premier cas, pour s'affirmer, la communauté s'efforce de marquer des frontières épistémologiques et méthodologiques, tandis que dans le second, elle essaie de franchir, de s'affranchir de frontières épistémiques et sociales considérées comme autant d'obstacles à la diffusion et à la création de connaissances nouvelles. Ce qui nous paraît intéressant, c'est que dans leurs pratiques qui ne sont ni jamais complètement formelles et stabilisées, ni totalement informelles et en construction, les mathématiciens doivent sans cesse articuler ces conceptions souvent distinctes de la « communauté des mathématiciens » à laquelle ils appartiennent et souhaitent se référer.

Références

- Bazerman C, 1988, *Shaping Written Knowledge. The Genre and Activity of the Experimental Article in Science*, Madison, University of Wisconsin Press.
- Denis J., Pontille D., 2002, « L'écriture comme dispositif d'articulation entre terrain et recherche », *Alinéa*, 12, pp. 93-106.
- Dolby R.GA, 1982, « On the Autonomy of Pure Science : the Construction and Maintenance of Barriers between Scientific Establishments and Popular Culture », pp. 267-292, in : Elisa N., Martins H., Whitley R., eds., *Scientific Establishments and Hierarchies. Sociology of Sciences*, VI., Dordrecht, Reidel Publishing Company.
- Dubois M., 1999, *Introduction à la sociologie des sciences*, Paris, Presses universitaires de France.

- Eisenstein E. I., 1979, *La révolution de l'imprimé dans l'Europe des premiers temps modernes*, Paris, Éd. La Découverte, 1991.
- Fleck L., 1935, *Genesis and Development of Scientific Facts*, Chicago, University of Chicago Press, 1979.
- Hunt B.-J., 1991, « Rigorous Discipin : Oliver Heaviside Versus the Mathematidans », pp. 72-95, in : Dear P., dir., *The Uterary Structure of Scientific Argument*, Philadelphia, University of Pennsylvania Press.
- Jaffe A., Quinn, F., 1993, « Theoretical Mathematics : toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics », *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol.29,1 ,pp. 1-13.
- Jeanneret Y., 1998, *L'affaire Sokal ou la querelle des impostures*, Paris, Presses Universitaires de France.
- Jurdant B., dir., 1998, *Impostures scientifiques : les malentendus de l'affaire Sokal*, Paris, Éd. La Découverte/ Éd. Alliage.
- Knorr-Cetina K., 1981, *The Manufacture of Knowledge :An Essay on the Constructivist and Contextual Nature of Scdence*, Oxford, Pergamon Press.
- Kuhn T. S., 1970, *La structure des révolutions scientifiques*, trad. de l'anglais par L Meyer, Paris, Flammarion, 1983.
- Latour B., 1985, « Les "vues" de l'esprit », *Culture Technique*, 14, Les « vues » de l'esprit, pp. 4-30.
- Latour B., Woolgar S., 1979, *La vie de laboratoire. La production des faits scientifiques*, Paris, Éd. La D écouverte.
- Lefebvre M., 2001, *Images, écritures et espace de médiation : étude anthropologique des pratiques graphiques dans une communauté de mathématiciens*, Thèse en sciences de l'information et de la communication, Université Strasbourg I.
- MacKenzie D., 1999, « Slaying the Kraken :the Sociohistory of a Mathematical Proof », *Social Studies of Scdence*, 29/1, pp. 7-60.
- Martin O., 2000, *Sociologie des sciences*, Paris, Nathan.
- Merton R. K., 1973, *Sociology of Science. Theoretical and Empirical Investigations*, Chicago, Chicago University Press.
- Ochs E., Jacoby S., Gonzales P., 1994, « Interpretive Journeys : How PhysicistsTalk and Travel Trough Graphie Space », *Configurations*, 2,1, pp. 151-171.
- Pontille D., 2000, *La signature scientifique : espaces d'inscription et mises en ordre*, Thèse en sociologie, Université Toulouse 2.
- Popper KL, 1934, *La logique de la œcouverte scientifique*, trad. de l'anglais par N.Thyssen-Rutten et Ph. Devaux, Paris, Pavot, 1978.
- Sha X.W., 2000, *Differential Geometry Performance and the Technology of Writing*, Thèse de philosophie, Stanford University.
- Swanson E., 1971, *Mathematics into Type*, Providence, American Mathematical Society, 1979.
- Vinck D., 1995, *Sociologie des sciences*, Paris, A. Colin.