

CONSTRUCTION ET DECONSTRUCTION DES DIAGRAMMES DE DYNKIN

Les représentations visuelles utilisées en mathématiques sont très variées. On les rencontre aussi bien dans les brouillons des mathématiciens,

dans leurs publications, que sur les tableaux des séminaires et conférences. S'il est très difficile de définir d'un point de vue sémiotique ce qu'est une « image » mathématique, on peut cependant se demander si, d'un point de vue ethnographique et sociologique, les mêmes dessins sont utilisés dans les mêmes conditions. Ou plutôt, une même image peut-elle faire l'objet d'usages différenciés? Objets matériels complexes, les représentations visuelles mathématiques doivent être étudiées à partir des multiples manipulations et usages dont elles font l'objet selon le contexte mathématique, l'acteur qui les mobilise et ses objectifs. À partir de l'exemple des diagrammes de Dynkin, très employés en géométrie algébrique mais également dans d'autres domaines mathématiques, on observera dans cette note de recherche le caractère *multiplé*¹ d'un type spécifique de représentations visuelles mathématiques: les diagrammes. Pour cette étude, nous nous sommes appuyés sur une analyse de documents mathématiques (articles, brouillons) et sur des entretiens de type semi-directif réalisés avec des chercheurs de l'université Louis-Pasteur de Strasbourg². Il ne sera pas question de substituer ici le sociologue au spécialiste mathématicien des diagrammes de Dynkin, mais de décrire comment ces dessins constituent des outils de formalisation et de représentation du savoir, qui sont également des objets de connaissance. Différentes utilisations de ces diagrammes peuvent en effet coexister en mathématiques, certaines relevant d'une dimension technique, d'autres d'une dimension plus conceptuelle : il s'agit d'être en mesure de constater ces variations pour saisir le travail mathématique même.

Brève histoire des diagrammes de Dynkin

Ces diagrammes proviennent de l'algèbre linéaire, domaine mathématique où ils sont principalement utilisés pour classer des objets mathématiques appe-

lés systèmes de racines et, par extension, pour classer les algèbres de Lie semi-simples. Une première classification formelle des systèmes de racines a été établie par deux mathématiciens, Cartan et Killing, autour de 1890³. Ils ont montré que la classification des algèbres de Lie semi-simples complexes se ramenait à celle de « systèmes de racines » associés. Weyl, puis Van der Waerden ont ultérieurement cherché à représenter de façon plus géométrique cette classification formelle.

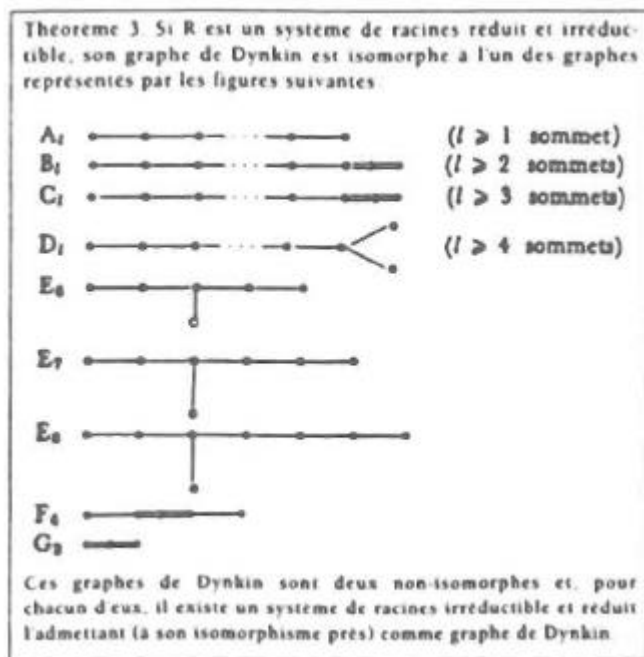
En 1946, Dynkin, mathématicien russe, publie un article qui introduit une manière originale de présenter la classification des systèmes de racines à partir de diagrammes composés simplement de sommets et d'arêtes⁴. C'est là notre point de départ. Sur chaque schéma, seules les particularités du système de racines considéré apparaissent. Ses propriétés générales ne sont, elles, pas explicitées. À chaque racine simple est associé un point (*sommet*). Deux sommets distincts sont reliés par 0, 1, 2 ou 3 traits (*arêtes*), suivant la relation entretenue par les deux racines concernées. Le signe > est ajouté sur les arêtes reliant deux sommets lorsqu'une des deux racines est plus longue que l'autre. À chaque diagramme de Dynkin est alors associée une algèbre de Lie : une algèbre de Lie simple correspond à un système de racines, alors qu'à un système de racines est associé un dia-

1 - La notion d'*objet multiplé* a été définie par Merz dans une étude sur les usages des outils de simulation en physique des particules. Elle s'est inspirée des travaux de Knorr-Cetina et de Remberger sur les concepts d'« objets épistémiques » et d'« objets techniques » pour montrer que les simulateurs d'événements sont des objets d'une grande complexité, qui conjuguent en leur sein plusieurs dimensions selon les acteurs et les contextes d'utilisation. Voir M. Merz, « Multiplex and unfolding: computer simulation in particle physics », *Science in Context*, vol. XII, n° 2, 1999, p 293-316

2 - Pour plus de détails sur la méthodologie, voir ma thèse de doctorat « Images, écritures et espace de médiation : étude anthropologique des pratiques graphiques dans une communauté de mathématiciens » soutenue en décembre 2001 à Strasbourg

3 - Voir N Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*. Paris. Hermann, 1968 pour des développements historiques.

4 - E B Dynkin. «The classification of simple Lie groups», *Rec. Math [Mat. Sbornik]*, vol XVIII, n° 60, 1946. p. 347-352



gramme de Dynkin. Les diagrammes de Dynkin sont ainsi construits de manière à entretenir une relation de bijection avec les algèbres de Lie semi-simples. Ils font l'objet d'une interprétation univoque ou, pour le dire en des termes moins techniques, d'une interprétation strictement contrôlée par la construction des mathématiciens et, dans ce cadre, dépourvue d'ambiguïté.

Une chose aux multiples usages

Quel intérêt présentent de tels diagrammes ? Sont-ils souvent utilisés par les mathématiciens et dans quels contextes ? Les algèbres de Lie sont un concept dont les chercheurs font fréquemment emploi. Elles sont intimement liées aux groupes de Lie, d'usage courant en mathématiques, mais aussi en physique, pour décrire et classifier d'autres concepts. Cependant, les utilisateurs des diagrammes de Dynkin ne se contentent pas de classer les algèbres de Lie⁵, les graphiques encodent également leurs principales propriétés à l'aide d'un symbolisme à la fois simple et utile. C'est pourquoi les chercheurs les utilisent fréquemment pour décrire les propriétés d'objets mathématiques particuliers.

Aussi rencontre-t-on des diagrammes de Dynkin dans de très nombreux théorèmes mathématiques de classification, souvent indépendants les uns des autres : classification des solides platoniciens, des catégories d'espaces linéaires, des singularités d'hypersurfaces algébriques, des points critiques de fonctions n'ayant pas de module ou encore des groupes de Coxeter engendrés par des réflexions⁶. On peut citer l'exemple du théorème de Gabriel qui stipule qu'un objet

mathématique particulier appelé un carquois possède un nombre fini de représentations indécomposables à la seule condition que le graphe qui lui est associé soit l'un des diagrammes de Dynkin cités. Les diagrammes de Dynkin sont alors utilisés comme un système de représentation pour indiquer les propriétés particulières d'algèbres de Lie spécifiques. Ils renvoient également de manière implicite aux propriétés générales des algèbres de Lie. S'ils sont mentionnés par leur abréviation (A_n , D_n , E_6 , etc.), ils ne sont cependant explicitement représentés ni dans le théorème, ni dans la démonstration qui suit. L'auteur considère tacitement que tous les mathématiciens

THEOREM (GABRIEL [2]). A quiver Q is of finite type if and only if its underlying undirected graph is one of the Dynkin diagrams A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 .

s'intéressant à ce thème de recherche connaissent les diagrammes de Dynkin, leur codification et en ont une parfaite maîtrise. Il n'est donc pas nécessaire de les reproduire.

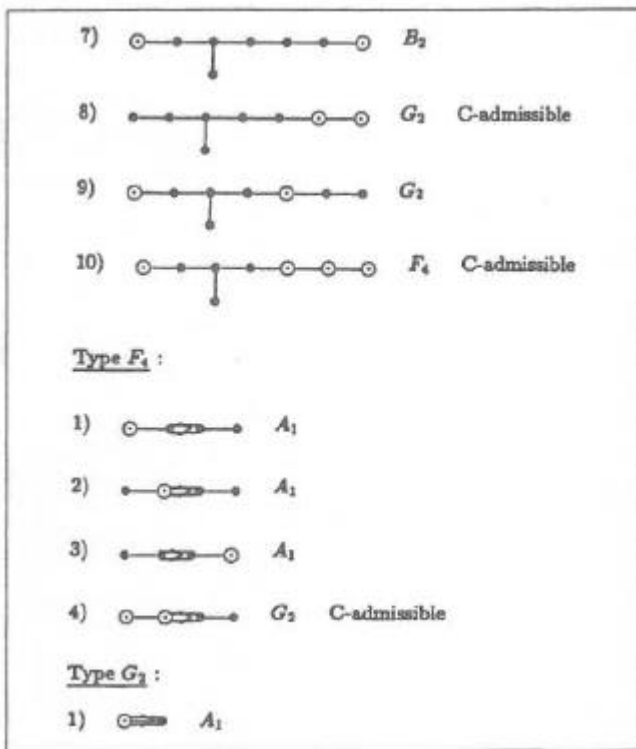
Ce n'est pas tout. Les diagrammes de Dynkin y sont considérés comme des boîtes noires, c'est-à-dire comme des objets fermés, fixes et stables. Outils permettant d'établir des classifications et d'engager de nouvelles comparaisons, ils sont envisagés, dans une appréhension globale, comme des symboles dont la signification a été arrêtée une fois pour toutes. C'est là un premier type d'usage technique. Mais d'autres cas de figures peuvent être attestés. Très souvent, en effet, lorsque des chercheurs construisent une nouvelle classification de familles infinies qui présentent une certaine régularité (malgré quelques cas particuliers), ils essaient d'y associer les diagrammes de Dynkin. Parfois, comme précédemment, c'est en les manipulant comme des symboles établis une fois pour toutes. D'autres fois, c'est en ouvrant la boîte noire et en déconstruisant les diagrammes. Car si les diagrammes de Dynkin correspondent à des représentations, ce sont également des objets matériels, susceptibles de manipulations diverses. Et manipuler ces diagrammes, c'est également manipuler les concepts qui y sont associés. C'est ce que rapporte, à partir de ses propres recherches, un des mathématiciens que nous avons interrogé à Strasbourg.

5 - D'autres mathématiciens, comme Jean-Pierre Serre ont procédé en sens inverse. Serre a cherché à reconstruire une algèbre de Lie simple à partir des diagrammes de Dynkin correspondants, sans être intervenir tes systèmes de racines Voir J -F Serre. *Algèbres de Lie semi-complexes*, New York. W. A. Benjamin. 1966.

6 - Voir l'article de M. Hazewinkel, W Hessehink, D Siersma et F D Veldkamp. « The ubiquity of Coxeter-Dynkin diagrams ». *Nieuw Arckief Voor Wiskunde*. 3-XXV, 1977, p. 257-307.

Ce chercheur s'intéressait aux \mathbb{Z} -graduations irréductibles des algèbres de Lie simples sur le corps des nombres complexes. Ces algèbres sont associées à des espaces dits « préhomogènes », dont deux autres mathématiciens avaient établi, en 1977, une première classification : « Les Japonais avaient fait une classification là-dessus monstrueuse qui est là. C'est cent cinquante pages de calculs fous. Bon, ce qui s'est passé, c'est qu'ils n'avaient pas vu que le groupe et l'espace préhomogène... on pouvait les mettre ensemble dans une algèbre de Lie. Et quand on voyait les choses comme ça, c'était beaucoup plus simple. Et c'est là qu'intervenaient mes diagrammes. »

Notre interlocuteur raconte avoir cherché à associer ces espaces préhomogènes à des diagrammes de Dynkin qu'il a légèrement modifiés. Dans ce but, il a entouré certains des sommets de ces diagrammes, correspondant à des racines particulières, de la manière suivante⁷.



Il ajoute au cours de l'entretien : « [...] Cet article de classification qui leur prend cent cinquante pages, moi, j'ai refait la classification derrière, ça prend... vingt-cinq pages, une fois qu'on a compris quelque chose. Et donc j'ai attaché à ces espaces des diagrammes. »

Ainsi, les diagrammes de Dynkin « à poids » élaborés par ce chercheur constituent une présentation graphique beaucoup plus concise de la classification.

[...] Deux ou trois cas échappaient à ma classification. Et j'ai joué les règles – bon, il y a des règles pour qu'on puisse lire les représentations, en ajoutant un ou deux

ou trois ponts. Et donc j'ai rajouté, c'était des ponts comme ça, ça ne représentait rien. Ce n'était pas des diagrammes de Dynkin, donc je ne savais pas les interpréter. Mais ce qui est remarquable, c'est que ça s'interprète comme des algèbres de Kac, qui sont des objets plus généraux. Donc le fait d'avoir joué le jeu des diagrammes comme ça, ça permet de dire, de rattacher les choses à d'autres objets, d'autres domaines. [...] Alors il y a des règles de raccordement selon la représentation, et j'avais l'intuition que ça devait marcher. Donc je rajoutais, je mettais les flèches comme il fallait – enfin, d'après comment était donnée la représentation – et je priais le ciel que ce soit un diagramme de Dynkin. Et finalement ça l'était. Mais après je l'ai démontré. »

Ce mathématicien dit avoir plus tard utilisé ces mêmes diagrammes de Dynkin « à poids » pour construire un nouveau concept mathématique : les « tours duales », associées à des paires duales d'algèbres de Lie. C'est à nouveau la manipulation des diagrammes, leur décomposition, puis leur transformation, avec l'ajout d'informations supplémentaires, qui, selon lui, l'ont amené à classer, puis à comparer ces différents concepts.

De la même manière, on peut citer l'exemple de trois mathématiciens⁸ qui, étudiant les groupes de réflexions complexes à partir d'une présentation par générateurs et relations, ont cherché un symbolisme graphique qui évoque la présentation obtenue tout en étendant le symbolisme de Dynkin-Coxeter. Ils se sont également directement inspirés des diagrammes de Dynkin-Coxeter pour construire leur présentation⁹.

Ici encore, c'est à partir des diagrammes de Dynkin originaux, déconstruits, modifiés et complétés, que ces mathématiciens ont étendu leurs études sur les groupes de réflexion et élaboré un savoir nouveau. Dans ce contexte, c'est la dimension graphique du diagramme, le fait qu'il s'agisse d'un objet matériel dont la manipulation accompagne l'appréhension et l'appropriation du concept correspondant qui est déterminante. Ce diagramme permet de saisir simultanément l'objet mathématique et sa représentation symbolique. À ce titre, il constitue un objet épistémique fondamental. Il ne s'agit plus d'un usage technique, mais conceptuel.

A partir de ces deux exemples que nous venons de développer, les diagrammes de Dynkin peuvent faire l'objet de plusieurs niveaux de lecture et d'utilisation.

7 - Représentations extraites de H. Rubenthaler, « Les paires duales dans les algèbres de Lie réductives », *Astérisque*, n° 219, 1994, p. 1-121.

8 - M. Broué, G. Malle et R. Rouquier, « On complex reflection groups and their associated groups », *Canadian Math. Society*, n° 16, 1995, p. 1-13.

9 - Représentations extraites de l'article de M. Broué *et al.*, *ibid.*

name	diagram	degrees	codegrees	β
G_{12}		6, 8	0, 10	$(stu)^4$
G_{13}		8, 12	0, 16	$(stu)^3$
G_{22}		12, 20	0, 28	$(stu)^5$
G_{23}		2, 6, 10	0, 4, 8	$(stu)^5$
G_{24}		4, 6, 14	0, 8, 10	$(stu)^7$
G_{27}		6, 12, 30	0, 18, 24	$(stu)^5$
G_{28}		2, 6, 8, 12	0, 4, 6, 10	$(stuv)^5$
G_{29}		4, 8, 12, 20	0, 8, 12, 16	$(stuv)^5$
G_{30}		2, 12, 20, 30	0, 10, 18, 28	$(stuv)^{15}$

Dans un cas, les mathématiciens peuvent y recourir comme à des instruments techniques, commodes pour représenter de façon concise les propriétés des algèbres de Lie. Mais simultanément, ils constituent des objets conceptuels qui sont utilisés directement dans la construction d'un savoir mathématique nouveau. Le titre d'un article de Hazewinkel qui présente les recherches récentes autour des diagrammes de Dynkin, « The ubiquity of Coxeter-Dynkin diagrams », est d'ailleurs tout à fait clair¹⁰: les diagrammes de Dynkin-Coxeter sont appréhendés par les mathématiciens eux-mêmes comme des outils faisant l'objet d'usages variés, de niveaux de manipulation divers, dans des situations mathématiques multiples.

La notion de *multiplicité* introduite par Merz est ici particulièrement féconde pour rendre compte de la complexité de ces représentations visuelles mathématiques et de leurs usages¹¹. Contrairement à la polysémie, qui n'indique que les différentes significations attribuées par exemple à un dessin, la notion de multiplicité s'attache aux différents usages dont peut faire l'objet une même représentation. Ces diagrammes renvoient simultanément à des objets matériels, manipulables graphiquement, à un signe représentant un «objet» mathématique – certaines propriétés des algèbres de Lie simples par exemple – et enfin à un ensemble de pratiques et d'interprétations – règles d'encodage, de décomposition et de recomposition. Selon les objectifs de l'utilisateur, ils peuvent être perçus globalement, c'est-à-dire comme un symbole, ou de manière séquentielle, comme une sorte d'écriture décomposable et recomposable à souhait. Loin de constituer des objets figés et immuables, leur usage par les mathématiciens oscille sans cesse entre dimensions techniques et dimensions conceptuelles, dans des contextes qui ne sont pas définis à l'avance et par des acteurs différents. L'outil de représentation côtoie l'objet conceptuel manipulable et décomposable. Un tel système d'usages, tous pertinents d'un point de vue mathématique, mais structuré au sens où les mathématiciens concernés y investissent des préférences, des savoir-faire, bref, des dispositions mathématiques différentes, montre par l'exemple que la cohérence des traces formelles et matérielles et l'intuition conceptuelle sont toutes deux à l'œuvre et inséparables sur le même support d'un geste mathématique élémentaire.

10 - M. Hazewinkel *et al*, « The ubiquity of Coxeter-Dynkin diagrams », *art. cit.*

11 - M. Merz, « Multiplex and unfolding », *art. cit.*